

# ÜBER DIE LÖSUNG DER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG FÜR DEN AUSSENRAUM EINES ZYLINDERS MIT KREISFÖRMIGEM QUERSCHNITT

ERICH MUNDRY

Niedersächsisches Landesamt für Bodenforschung, Hannover

(Eingegangen 26. Juli 1965)

**Zusammenfassung**—Es werden einige Ergebnisse über die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für den Aussenraum eines Zylinders unter der Voraussetzung der Zylindersymmetrie mitgeteilt. Für den Fall zeitlich konstanter sowie periodisch veränderlicher Gastemperatur im Zylinder werden einige Diagramme berechnet. Die Temperaturverteilung in axialer Richtung kann näherungsweise bestimmt werden. Die Ergebnisse lassen sich auf den Halbraum mit linear ansteigender Wärmeleitfähigkeit anwenden.

## 1. EINLEITUNG

BEI EINIGEN technischen Aufgaben ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für den Aussenraum eines von Gas durchströmten Zylinders mit kreisförmigem Querschnitt unter Berücksichtigung einer Wärmeübergangszahl gesucht. Vor allem für den Bergbau ist die Kenntnis dieser Lösung zur Bestimmung des Temperaturfeldes in der Umgebung bewetterter Strecken und Schächte von Bedeutung. So stellt u. a. König [1] in einer ausführlichen Arbeit die Anwendung bestimmter Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf bewetterungstechnische Probleme des Bergbaus dar.

Verschiedene Untersuchungen haben ergeben, dass ausserhalb des Zylinders der axiale im Vergleich zum radialen Wärmestrom vernachlässigt werden kann. Ist das den Zylinder umgebende Medium bezüglich der Wärmeleitung homogen und isotrop, dann lässt sich die Temperatur  $\vartheta$  unter der Voraussetzung der Zylindersymmetrie aus der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad (r > R) \quad (1)$$

bestimmen, wobei  $t$  die Zeit,  $r$  den radialen Abstand von der Zylinderachse,  $R$  den Zylinder-radius und  $a$  die Temperaturleitfähigkeit des unendlich ausgedehnten Mediums bedeutet. Die

Lösung der Gleichung (1) muss im betrachteten Gebiet beschränkt sein, es soll gelten:

$$\vartheta \rightarrow \vartheta_0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Wird ein Abkühlungsvorgang betrachtet und der Wärmeübergang in das Gas durch eine konstante Wärmeübergangszahl  $\alpha$  beschrieben, dann gilt an der Zylinderwand die Randbedingung

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \alpha(\vartheta - \Theta) \quad \text{für } r = R. \quad (3)$$

Hierbei bedeutet  $\Theta$  die über den gesamten Querschnitt konstante Gastemperatur,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit des Mediums. Zur Lösung von (1) ist noch eine Anfangsbedingung erforderlich.

## 2. ZEITLICH KONSTANTE GASTEMPERATUR

Ist im Zeitpunkt  $t = 0$  die Temperatur überall konstant:

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad \text{für } t = 0 \quad (4)$$

und nimmt in diesem Zeitpunkt die Gastemperatur den konstanten Wert  $\Theta_0$  an:

$$\Theta = \Theta_0 \quad \text{für } t > 0, \quad (5)$$

dann kann die entstehende Temperaturverteilung auf einfache Weise mit Hilfe der Laplacetransformation berechnet werden, wie Jaeger [2] und Kremnjev [3] gezeigt haben.

Für den Fall unendlich grosser Wärmeübergangszahl, d.h. für die Randbedingung

$$\vartheta = \Theta_0 \quad \text{für } r = R, t > 0$$

gibt Jaeger [4] numerische Werte an. Für den allgemeinen Fall hat u.a. Jessop [5] den auftretenden Wärmestrom berechnet.

Zur Vereinfachung empfiehlt sich die Einführung der dimensionslosen Grössen

$$\chi = \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{\vartheta_0 - \Theta_0}, \quad \rho = \frac{r}{R} \quad (6)$$

$$\tau = \frac{a}{R^2} t, \quad \sigma = \frac{\alpha}{\lambda} R.$$

Wird die Laplacetransformierte

$$\bar{\chi}(\rho, p) = \int_0^{\infty} \chi(\tau, \rho) \cdot e^{-p\tau} d\tau$$

benutzt, dann liefert die Wärmeleitungsgleichung (1) zusammen mit der Anfangsbedingung (4) die Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \bar{\chi}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{\chi}}{d\rho} - p\bar{\chi} = 0, \quad (7)$$

von deren Lösungen die Hankelfunktion nullter Ordnung  $H_0^{(1)}(i\rho\sqrt{p})$  die Bedingung (2) erfüllt. Die noch fehlende multiplikative Funktion wird aus der aus (3) und (5) folgenden Bedingung

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\rho} + \sigma \left( \frac{1}{\rho} - \bar{\chi} \right) = 0 \quad \text{für } \rho = 1 \quad (8)$$

ermittelt. Es ergibt sich dann für die Lösung im Unterbereich der Laplace transformierten

$$\bar{\chi} = \frac{\sigma H_0^{(1)}(i\rho\sqrt{p})}{p[\sigma H_0^{(1)}\{i\sqrt{p}\} + i\sqrt{p}H_1^{(1)}(i\sqrt{p})]}. \quad (9)$$

Unter Benutzung des Umkehrintegrals der Laplacetransformation folgt daraus die gesuchte Lösung

$$\chi(\tau, \rho; \sigma) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W}{U^2 + V^2} \cdot \frac{\exp[-\tau x^2]}{x} dx \quad (10)$$

mit

$$U = J_0(x) + \frac{x}{\sigma} J_1(x)$$

$$V = N_0(x) + \frac{x}{\sigma} N_1(x)$$

$$W = N_0(\rho x) \cdot U - J_0(\rho x) \cdot V$$

Hierbei bedeuten  $J_0, N_0$  bzw.  $J_1, N_1$  die Bessel- und Neumannfunktion nullter bzw. erster Ordnung.

Der Integrand in (10) wächst für  $x \rightarrow 0$  unbeschränkt. Um das Integral numerisch auswerten zu können, ist deshalb eine solche Aufteilung des Intervalls  $(0, \infty)$  in die Intervalle  $(0, x_u)$ ,  $(x_u, x_o)$  und  $(x_o, \infty)$  zweckmässig, dass in  $(0, x_u)$  der Integrand durch eine elementar integrierbare Funktion approximiert werden kann und das über  $(x_o, \infty)$  erstreckte Integral im Rahmen der erforderlichen Genauigkeit vernachlässigt werden kann. Werden in der Reihendarstellung von  $J_0, N_0, x \cdot J_1, x \cdot N_1$  sowie  $\exp[-x^2\tau]$  quadratische und höhere Glieder in  $x$  vernachlässigt, dann ergibt sich für das erste Integral näherungsweise

$$\frac{\pi}{2\sigma} \int_0^{x_u} \frac{1 + \sigma \log \rho}{x [\pi^2/4 + (\log x/2 + C - 1/\sigma)^2]} dx = \frac{2}{\pi\sigma} (1 + \sigma \log \rho) \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \arctan q \right), \quad (11)$$

wobei  $C = 0,5772$  die Euler-Mascheronische Konstante und

$$q = \frac{2}{\pi} \left( \log \frac{x_u}{2} + C - \frac{1}{\sigma} \right)$$

bedeutet. Die Gösse  $x_u$  lässt sich durch Abschätzung der vernachlässigten quadratischen Glieder gewinnen, wodurch sich die Bedingungen  $\rho^2 x_u^2 = \text{const.}$  und  $\tau x_u^2 = \text{const.}$  ergeben. Für grosse Argumente  $x$  wird der Integrand von (10) wesentlich durch den Exponentialfaktor beeinflusst, so dass sich zur Bestimmung der Grenze  $x_o$  eine Beziehung der Form  $\tau x_o^2 = \text{const.}$  eignet. Für grosse Entfernungen  $\rho$  kann die Auswertung durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen  $\xi = x \cdot \rho$  in (10) erleichtert werden.

In Abb. 1 ist das Ergebnis für die Nusseltzahl  $\sigma = 5$  dargestellt. Die Berechnung des verbliebenen Integrals mit den Grenzen  $x_u$  und  $x_o$  erfolgte mit Hilfe der Gausschen Integrationsformel für fünf Stützpunkte. Dabei erwiesen sich die Grenzen

$$x_u = \text{Min} \left( \frac{0,06}{\rho}, \frac{0,07}{\sqrt{\tau}} \right)$$

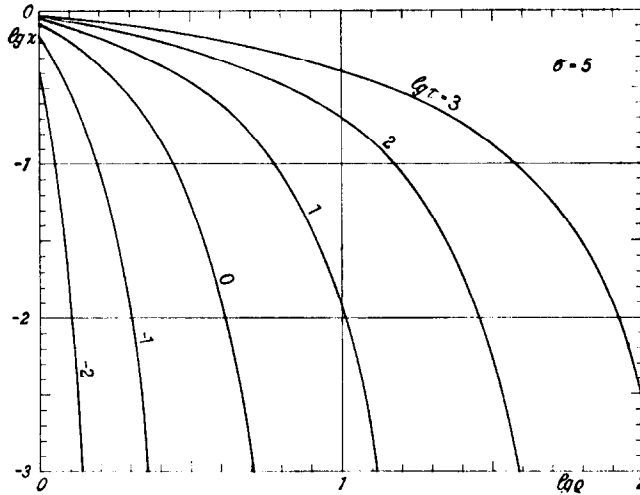


Abb. 1. Temperaturverteilung bei konstanter Gastemperatur in Abhängigkeit von  $\rho$  und  $\tau$  für  $\sigma = 5$ .

$$x_0 = \frac{1,8}{\sqrt{\tau}}$$

in den meisten Fällen als geeignet. Die Rechnungen wurden mit einer IBM 1620-Rechenanlage durchgeführt, wobei für Argumentwerte grösser als 8 asymptotische Ausdrücke für die Zylinderfunktionen benutzt wurden [6].

Ist die Gastemperatur zeitlich veränderlich, dann lässt sich die dann auftretende relative Temperatur  $\chi_b$  nach dem Prinzip von Duhamel aus der Lösung (10) berechnen. Stellt

$$\phi(\tau) = \frac{\vartheta_0 - \Theta}{\vartheta_0 - \Theta_0}$$

mit  $\Theta_0 = \Theta(0)$  die relative Gastemperatur dar, dann ist

$$\chi_b = \chi(\tau, \rho; \sigma) + \int_0^\tau \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=\tau} \cdot \chi(\tau - t, \rho; \sigma) dt. \quad (12)$$

Wird die Kühlung durch den Gasstrom eingestellt, dann kann der Wärmeausgleich näherungsweise aus der Punktquellenlösung der Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten berechnet werden. Die erreichte Temperaturverteilung  $\chi_b(\rho)$  wird als Anfangstemperatur für den einsetzenden Ausgleichsvorgang angesehen. Die relative Temperatur  $\chi'$  ergibt sich dann aus diesem Zylinderschalenmodell zu

$$\chi' = \frac{1}{2\tau} \int_0^\infty \rho' \cdot \chi_b(\rho') \cdot J_0 \left( i \frac{\rho \rho'}{2\tau} \right) \cdot \exp \left[ - \frac{\rho^2 + \rho'^2}{4\tau} \right] d\rho'. \quad (13)$$

Diese Formel kann beispielsweise dazu dienen die nach dem Einstellen der Spülung in einer Tiefbohrung erforderliche Wartezeit abzuschätzen, um den ursprünglichen thermischen Zustand des Gesteins angenähert wieder herzustellen [7].

### 2.1. Näherungsformeln für die Temperatur

Für kleine Zeitwerte  $\tau$  bereitet die numerische Berechnung von  $\chi$  nach (10) wegen der schlechten Konvergenz des uneigentlichen Integrals Schwierigkeiten. Aus der für  $|p| \rightarrow \infty$  geltenden asymptotischen Darstellung der Laplacetransformierten  $\bar{\chi}$  lässt sich eine für kleine  $\tau$ -Werte brauchbare Näherungsformel für die relative Temperatur  $\chi$  ableiten. Unter Verwendung der für grosse  $|p|$  geltenden asymptotischen Darstellung

$$H_n^{(1)}(p) \sim \sqrt{\left( \frac{2}{\pi p} \right)} \exp \left[ i \left( p - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \right] \quad (n = 0, 1) \quad (14)$$

ergibt sich aus (9)

$$\bar{\chi} \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\sigma \exp \left[ - \sqrt{p(\rho - 1)} \right]}{p(\sigma + \sqrt{p})}, \quad (15)$$

Dieser Ausdruck stimmt bis auf den Faktor  $\rho^{-1}$  mit der Laplacetransformierten der Lösung der Wärmeleitungsgleichung für den Halbraum  $\rho > 1$  mit den entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen überein. Deshalb liefert (15) die Näherungsformel

$$\begin{aligned} \chi \approx & \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[ 1 - \operatorname{erf} \frac{\rho - 1}{2\sqrt{\tau}} \right] \\ & - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp [\sigma(\rho - 1) + \sigma^2\tau] \\ & \cdot \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\rho - 1}{2\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau} \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

wobei

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp [-\xi^2] d\xi$$

die Fehlerfunktion darstellt. Die Formel (16) ist für  $(\sqrt{\tau}/\rho) < 0,5$  brauchbar.

Sieht man von grossen Entfernungen  $\rho$  ab, dann ist die Auskühlung für grosse Zeitwerte  $\tau$  quasistationär, d.h. sie hat die Form der Lösung der Wärmeleitungsgleichung für einen Hohlzylinder im stationären Fall, auf dessen äusserer Mantelfläche die Bedingung  $\chi = 0$  gilt. Die relative Temperatur verhält sich dann wie  $\log \rho$ , der äussere Radius ist eine Funktion der Variablen  $\tau$ . Daraus ergibt sich die für den Bereich  $10 \leq \tau \leq 1000$ ,  $\sigma \geq 1$  verwendbare Näherungsformel

$$\chi \approx \frac{\sigma(f - \log \rho)}{1 + \sigma f} \quad (17)$$

mit

$$f = 0,83 - \frac{0,092}{\sqrt[3]{\sigma}} + 0,465 \log \tau.$$

### 2.2. Halbraum mit linear zunehmender Wärmeleitfähigkeit

Die Lösung (10) der Wärmeleitungsgleichung für den Aussenraum eines Zylinders lässt sich auch zur Berechnung der Temperaturverteilung im Halbraum  $y > 0$  mit linear zunehmender Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta y) \quad (\beta > 0) \quad (18)$$

für dieselben Rand- und Anfangsbedingungen benutzen. Stellt  $a_0$  die Temperaturleitfähigkeit für  $y \rightarrow +0$  dar, dann nimmt die Wärmeleitungsgleichung für diesen inhomogenen Fall die Form

$$(1 + \beta y) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (19)$$

an. Durch die Transformation

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{\vartheta_0 - \vartheta_0}, \quad \rho = \sqrt{1 + \beta y} \\ \tau &= \frac{a_0 \beta^2}{4} t, \quad \sigma = \frac{2\alpha}{\beta \lambda_0} \end{aligned} \quad (20)$$

lässt sich die entsprechende Lösung auf die Lösung (10) des Zylinderproblems zurückführen.

### 3. PERIODISCHE TEMPERATUR

Die Temperaturverteilung bei periodischer Gastemperatur kann nach dem Prinzip von Duhamel bestimmt werden. Für den stationären Vorgang empfiehlt sich jedoch die Synthese der Lösung aus harmonischen Schwingungen. Bezeichnet  $\vartheta_m$  den Mittelwert und  $\vartheta_p$  die gesuchte Temperaturverteilung für die Gastemperatur der Schwingungsdauer  $T$  bzw. der relativen Schwingungsdauer  $\tau_0 = (2\pi/\omega) = (a/R^2)T$ :

$$\Theta = \vartheta_m + A \cdot \exp [-i\omega\tau], \quad (21)$$

dann liefert der Ansatz

$$\vartheta_p = \vartheta_m + A \cdot P(\rho) \cdot \exp [-i\omega\tau]$$

die Besselsche Differentialgleichung

$$P'' + \frac{1}{\rho} P' + i\omega P = 0 \quad (22)$$

mit der für  $\rho \rightarrow \infty$  verschwindenden Lösung  $H_0^{(1)}(\sqrt{i\rho\sqrt{\omega}})$ . Der multiplikative Faktor wird wieder aus der Randbedingung an der Zylinderwand errechnet und liefert damit

$$\vartheta_p = \vartheta_m + A \cdot A_\sigma \cdot A_\rho \cdot \exp [-i\omega\tau] \quad (23)$$

mit

$$\begin{aligned} A_\rho &= \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{i\rho\sqrt{\omega}})}{H_0^{(1)}(\sqrt{i\sqrt{\omega}})} \\ A_\sigma &= \frac{\sigma H_0^{(1)}(\sqrt{i\sqrt{\omega}})}{\sigma H_0^{(1)}(\sqrt{i\sqrt{\omega}}) + \sqrt{i\sqrt{\omega}} H_1^{(1)}(\sqrt{i\sqrt{\omega}})} \end{aligned} \quad (24)$$

Stellt man die komplexen Zahlen  $A_\rho$  und  $A_\sigma$  durch die Beträge  $A_\rho$ ,  $A_\sigma$  und durch die Winkel  $\psi_\rho$ ,  $\psi_\sigma$  dar, dann lässt sich (23) in der Form

$$\vartheta_p = \vartheta_m + A \cdot A_\sigma \cdot A_\rho \cdot \exp[-i(\omega\tau - \psi_\rho - \psi_\sigma)] \quad (25)$$

schreiben. Die von der radialen Entfernung abhängige Amplitude  $A_\rho$  und die Phasenverschiebung  $\psi_\rho$  sind in Abb. 2 und 3, die von der Nusseltzahl  $\sigma$  abhängige Amplitude  $A_\sigma$  und Phasenverschiebung  $\psi_\sigma$  sind in Abb. 4 und 5 dargestellt.

Bei kurzperiodischen Schwingungen können  $A_\rho$  und  $A_\sigma$  wegen der asymptotischen Darstellung (14) aus

$$A_\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp[(\omega/2)^{\frac{1}{2}}(\rho - 1)(i - 1)] \quad (26)$$

$$A_\sigma \sim \frac{\sigma}{\sigma + (\omega/2)^{\frac{1}{2}}(1 - i)}$$

berechnet werden. Damit ergeben sich die Näherungsformeln

$$\left. \begin{aligned} A_\rho &\approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \exp[-(\omega/2)^{\frac{1}{2}}(\rho - 1)], \\ \psi_\rho &\approx (\omega/2)^{\frac{1}{2}}(\rho - 1) \\ A_\sigma &\approx \frac{\sigma}{\sqrt{[\sigma + (\omega/2)^{\frac{1}{2}}]^2 + (\omega/2)^{\frac{1}{2}}}}, \\ \psi_\sigma &\approx \arctan \frac{(\omega/2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma + (\omega/2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} (27)$$

Die Ausdrücke für  $\psi_\rho$ ,  $A_\sigma$  und  $\psi_\sigma$  sind identisch mit der entsprechenden Lösung für den Halbraum  $\rho > 1$ , die Amplitude ist mit dem Faktor  $\rho^{-\frac{1}{2}}$  versehen. Für grosse radiale Entfernungen  $\rho$  gilt analog

$$\log A_\rho \approx -\frac{1}{2} \log \rho - (\omega/2)^{\frac{1}{2}} \rho + c_1$$

$$\psi_\rho \approx (\omega/2)^{\frac{1}{2}} \rho + c_2 \quad (28)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  nur von  $\omega$  abhängen.

Werden wie in (20) die Grössen  $\rho$  und  $\sigma$  sowie  $\tau_0 = (a_0\beta^2/4)T$  benutzt, dann stellt (25) das Eindringen einer harmonischen Temperaturwelle in den Halbraum  $y > 0$  bei linear zunehmender Wärmeleitzahl (18) unter Berücksichtigung einer Wärmeübergangszahl an der Grenze des Mediums dar.

#### 4. TEMPERATURVERTEILUNG IN STRÖMUNGSRICHTUNG

Die im Abschnitt 2 angegebene Lösung gilt für eine zeitlich konstante Gastemperatur  $\Theta_0$ . Nun tritt jedoch längs des Gasweges aufgrund des Wärmestroms aus dem umgebenden Medium eine Erhöhung der Gastemperatur auf [8]. Ist der Massendurchsatz  $M$ , die spezifische Wärme des Gases  $c_p$ , dann gilt für die Temperaturerhöhung in Richtung des strömenden Gases

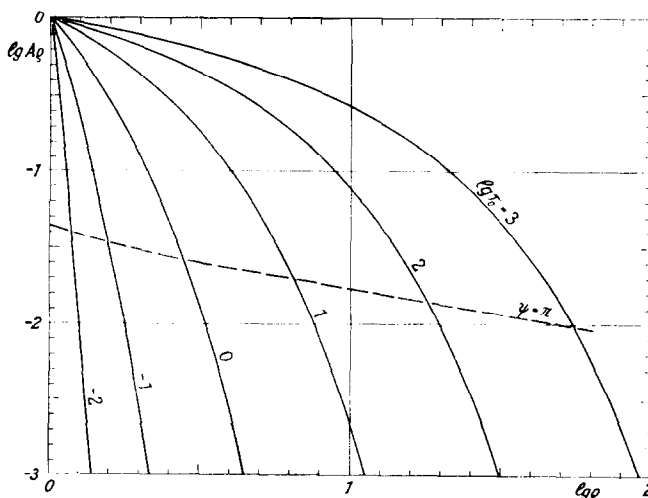


ABB. 2. Amplitude einer harmonischen Temperaturwelle in Abhängigkeit von  $\rho$  und  $\tau_0$ .

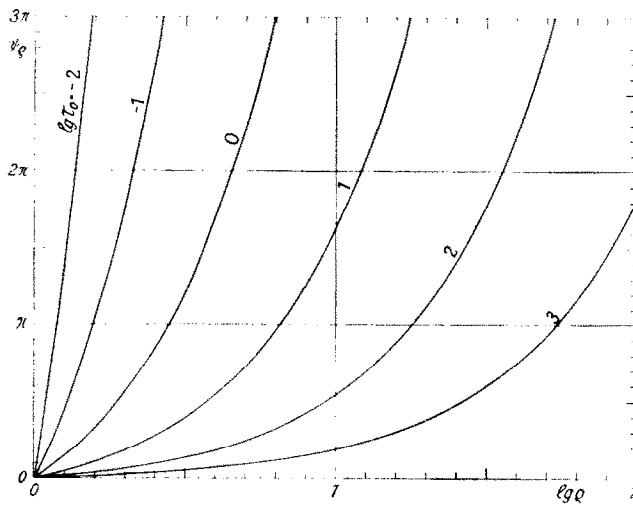


Abb. 3. Phasenverschiebung einer harmonischen Temperaturwelle in Abhängigkeit von  $\rho$  und  $\tau_0$ .

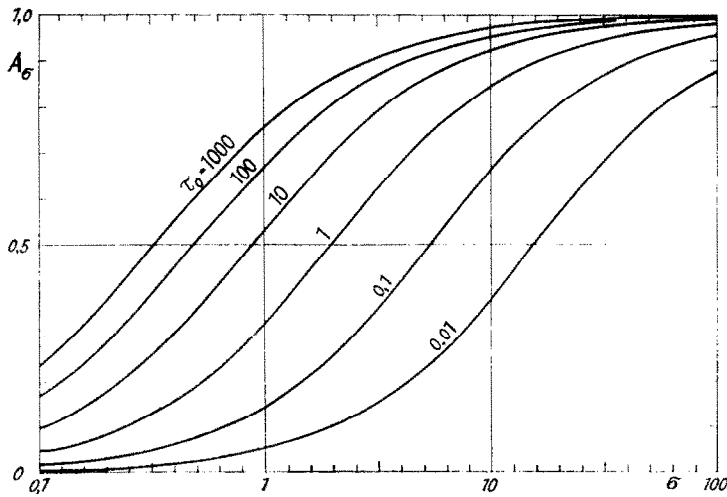


Abb. 4. Amplitude einer harmonischen Temperaturwelle in Abhängigkeit von  $\sigma$  und  $\tau_0$ .

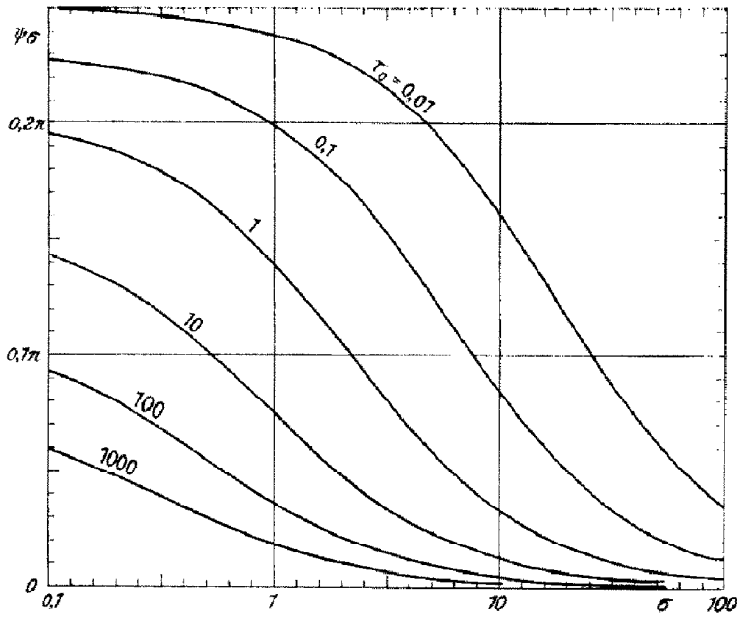


ABB. 5. Phasenverschiebung einer harmonischen Temperaturwelle in Abhängigkeit von  $\sigma$  und  $\tau_0$ .

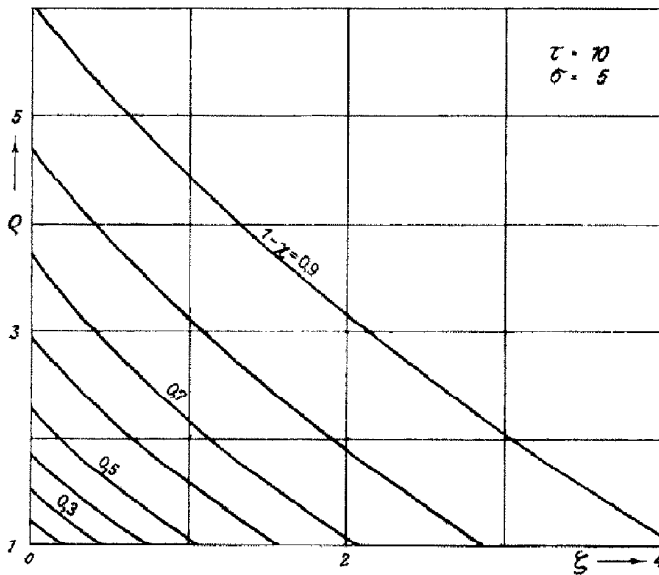


ABB. 6. Temperaturverteilung längs des Gasweges für  $\tau = 10$ ,  $\sigma = 5$ .

(z-Richtung) mit guter Näherung:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{2a\pi R}{c_p M} (\vartheta|_{r=R} - \Theta). \quad (29)$$

Für eine zeitlich konstante Gastemperatur am Eintrittsort  $z = 0$

$$\Theta = \Theta_0 \quad \text{für } z = 0, t > 0,$$

ergibt sich bei Benutzung der relativen Gastemperatur

$$\phi = \frac{\vartheta_0 - \Theta}{\vartheta_0 - \Theta_0}$$

und der dimensionslosen EntfernungsvARIABLEN

$$\zeta = \frac{2\pi \lambda}{c_p M} z$$

bei Vernachlässigung des axialen Wärmeflusses im umgebenden Medium die relative Temperatur  $\chi$  aus folgendem System mit den zugehörigen Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} & (\rho > 1) \\ \chi &= 0 & \text{für } \tau = 0 \\ \chi &\rightarrow 0 & \text{für } \rho \rightarrow \infty \\ \frac{\partial \chi}{\partial \rho} &= \sigma(\chi - \phi) & \text{für } \rho = 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} &= \sigma(\chi|_{\rho=1} - \phi) \\ \phi &= 1 & \text{für } \zeta = 0, \tau > 0 \end{aligned} \right\} (30)$$

Stellt  $\phi$  die Laplacetransformierte von  $\phi$  dar, dann ergeben die ersten vier Bedingungen im Unterbereich die zu (9) analoge Lösung

$$\bar{\chi} = \frac{\sigma H_0^{(1)}(i\rho\sqrt{p})}{\sigma H_0^{(1)}(i\sqrt{p}) + i\sqrt{p} H_1^{(1)}(i\sqrt{p})} \bar{\phi}. \quad (31)$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung für  $\phi$  als Funktion von  $\zeta$  sowie der Anfangsbedingung für  $\zeta = 0$  [die letzten beiden Bedingungen in (30)], lässt sich daraus  $\bar{\chi}$  bestimmen. Insgesamt erhält man

$$\bar{\chi} = \frac{\sigma}{p} \cdot H_0^{(1)}(i\rho\sqrt{p}) \cdot \exp \left[ - \frac{i\sigma\sqrt{p} H_1^{(1)}(i\sqrt{p})}{\sigma H_0^{(1)}(i\sqrt{p}) + i\sqrt{p} H_1^{(1)}(i\sqrt{p})} \cdot \zeta \right] \frac{\zeta}{\sigma H_0^{(1)}(i\sqrt{p}) + i\sqrt{p} H_1^{(1)}(i\sqrt{p})} \quad (32)$$

Das Umkehrintegral liefert die Temperaturverteilung

$$\chi(\tau, \rho, \zeta; \sigma) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X \cdot \sin \left( \frac{2\zeta}{\pi(U^2 + V^2)} \right) + W \cdot \cos \left( \frac{2\zeta}{\pi(U^2 + V^2)} \right) \frac{dx}{x \cdot (U^2 + V^2)} \exp \left[ - \frac{Y}{U^2 + V^2} x\zeta - x^2\tau \right] dx \quad (33)$$

mit

$$\begin{aligned} X &= J_0(\rho x) \cdot U + N_0(\rho x) \cdot V \\ Y &= J_1(x) \cdot U + N_1(x) \cdot V. \end{aligned}$$

In Abb. 6 ist ein Beispiel für  $\sigma = 5$ ,  $\tau = 10$  dargestellt. Die Isothermenflächen haben nahezu die Form von Kreiskegeln.

LITERATUR

1. H. KÖNIG, Mathematische Untersuchungen über das Grubenklima, *Bergbauarchiv* 13, 1-14 (1952).
2. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edn. Oxford (1959).
3. O. A. KREMNEV, Der nichstationäre Wärmeaustausch in Gruben, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 55, 1009-1012 (1952).
4. J. C. JAEGER, Numerical values for the temperature in radial heat flow, *J. Math. Phys.* 34, 316-321 (1955).
5. A. M. JESSOP, Heat flow in a system of cylindrical symmetry, *Canad. J. Phys.* 41, 1005-1009 (1963).
6. E. JAHNKE, F. EMDE and F. LÖSCH, *Tables of Higher Functions*, 6th edn. Teubner, Stuttgart (1960).
7. E. MUNDRY, Zur Berechnung der Gebirgstemperatur, Dissertation, Clausthal (1964).
8. C. v. HEERDEN, A problem unsteady heat flow in connexion with the air cooling of collieries, in *Proceedings of the General Discussion on Heat Transfer*, September 1951, pp. 283-285. Instn. Mech. Engrs., London (1952).



**Abstract**—Some results are given for the solution of the heat-conduction equation for a medium bounded internally by a cylinder, under the assumption of cylindrical symmetry. Diagrams are presented for the cases of constant and periodically varying temperature of the gas within the cylinder. The temperature distribution parallel to the axis can be estimated approximately. The results are also useful for obtaining the temperature distribution in a half-space with conductivity increasing linearly.

**Résumé**—La solution de l'équation de la chaleur est donnée à l'extérieur d'un cylindre en supposant une symétrie cylindrique. Quelques diagrammes sont présentés pour une température du gaz dans le cylindre constante ou périodique. La distribution axiale de température peut être déterminée de façon approchée. Les résultats peuvent être appliqués à un demi-espace avec une conductivité thermique augmentant linéairement avec la cote.

**Аннотация**—Сообщается о некоторых результатах по решению уравнения теплопроводности для внешней стенки цилиндра в предположении симметрии цилиндра.

Для случая постоянной и периодически изменяемой температуры газового потока, проходящего через цилиндр, рассчитываются некоторые диаграммы. Распределение температуры в осевом направлении может быть подсчитано приближенно. Результаты могут быть применены для полусферы с линейно возрастающим коэффициентом теплопроводности.